RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

MATA KULIAH : MATEMATIKA TEKNIK II
FAKULTAS : TEKNIK
PROGRAM STUDI : TEKNIK MESIN
BOBOT SKS : 3 (TIGA)
KODE : CM 220334
DOSEN PENGASUH : MIDUK TAMPUBOLON, S.Si., M.Si

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

MATA KULIAH : MATEMATIKA TEKNIK II
FAKULTAS : TEKNIK
PROGRAM STUDI : TEKNIK MESIN
BOBOT SKS : 3 (TIGA)
KODE : CM 220334
DOSEN PENGASUH : MIDUK TAMPUBOLON, S.Si , M.Si

MINGGU KE	POKOK BAHASAN DAN TIU	SUB POKOK BAHASAN DAN SASARAN BELAJAR	METODE PENGAJARAN	MEDIA	SUMBER
1	Aljabar Bilangan Kompleks TIU: Memberi penjelasan tentang notasi, konjugate , operasi dan Modulus bilangan kompleks, serta menjelaskan bentuk polar.	1.1 Notasi, konjugate bilangan kompleks 1.2 Operasi bilangan kompleks 1.3 Modulus bilangan kompleks 1.4 Bentuk polar *Mahasiswa dapat memahami operasi bilangan kompleks *Mahasiswa dapat memahami bentuk polar dari bilangan kompleks.	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2

2	Aljabar Bilangan Kompleks TIU: Memberi penjelasan tentang notasi, konjugate , operasi dan Modulus bilangan kompleks, serta menjelaskan bentuk polar.	1.5 Bentuk eksponensial 1.6 Perpangkatan bilangan kompleks 1.7 Akar bilangan kompleks * Mahasiswa dapat memahami bentul eksponensial bilangan kompleks * Mahasiswa dapat memahami perpangkatan bilangan kompleks * Mahasiswa dapat menentukan akar bilangan kompleks	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
3	Turunan Fungsi Kompleks TIU: Memberi penjelasan tentang rumus turunan turunan fungsi kompleks	2.1 Turunan fungsi kompleks 2.2 Perumusan Cauchy Riemann * Mahasiswa dapat memahami rumus turunan fungsi kompleks * Mahasiswa dapat memahami persamaan Cauchy Riemann	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
4	Fungsi Analitik TIU: Memberi penjelasan fungsi analitik, integral kompleks dan turunan fungsi analitik	3.1 Fungsi analitik 3.2 Integral lintasan * Mahasiswa dapat memahami sifat-sifat fungsi analitik * Mahasiswa dapat memahami integral lintasan	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2

5	Fungsi Analitik TIU: Memberi penjelasan tentang fungsi analitik, integral kompleks dan turunan fungsi analitik	3.3 Integral Cauchy 3.4 Turunan fungsi analitik * Mahasiswa dapat memahami integral Cauchy * Mahasiswa dapat menentukan turunan fungsi analitik.	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
6	Kekonvergenan Barisan dan deret. TIU: Memberi penjelasan tentang barisan aritmatika dan geometri, deret tak hingga, dan kaidah uji kekonvergenan.	4.1 Barisan dan deret aritmatika 4.2 Barisan dan deret geometri 4.3 Deret tak hingga * Mahasiswa dapat memahami barisan dan deret aritmatika * Mahasiswa dapat memahami barisan dan deret geometri, deret tak hingga	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
7	Kisi Kisi Ujian Tengah Semester TIU: Memberi gambaran tentang soal Ujian Tengah Semester	Soal soal terkait topik bahasan pertemuan pertama sampai pertemuan keenam. * Mahasiswa dapat memahami dan mengingat kembali topik yang sudah dipelajari dari pertemuan pertama sampai pertemuan keenam	diskusi dan quiz	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2

8	Kekonvergenan Barisan dan deret. TIU: Memberi penjelasan tentang barisan aritmatika dan geometri, deret tak hingga, dan kaidah uji kekonvergenan.	4.4 Kaidah uji kekonvergenan 4.5 Kekonvergenan mutlak * Mahasiswa dapat memahami kaidah uji kekonvergenan * Mahasiswa dapat memahami kekonvergenan mutlak	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
9	Deret Pangkat TIU: Memberi penjelasan tentang deret Taylor dan deret Maclaurin.	5.1 Deret Taylor 5.2 Deret Maclaurin 5.3 Deret Binomial * Mahasiswa dapat memahami deret Taylor , deret Maclaurin dan deret binomial.	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
10	Transformasi Laplace TIU: Memberi penjelasan tentang Transformasi Laplace, invers transformasi Laplace, masalah nilai awal, pergeseran sumbu.	6.1 Transformasi laplace 6.2 Invers transformasi Laplace * Mahasiswa dapat memahami transformasi Laplace * Mahasiswa dapat memahami invers transformasi Laplace	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2

11	Transformasi Laplace TIU: Memberi penjelasan tentang Transformasi Laplace, invers transformasi Laplace, masalah nilai awal, pergeseran sumbu.	6.3 Masalah nilai awal * Mahasiswa dapat memahami Masalah nilai awal	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
12	Transformasi Laplace TIU: Memberi penjelasan tentang Transformasi Laplace, invers transformasi Laplace, masalah nilai awal, pergeseran sumbu.	6.4 Pergeseran terhadap sumbu s 6.5 Pergeseran terhadap sumbu t * Mahasiswa dapat memahami transformasi Laplace dengan pergeseran terhadap sumbu s dan sumbu t	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2
13	Konvolusi. Persamaan integral TIU: Memberi penjelasan teorema konvolusi dan persamaan integral	7.1 Teorema konvolusi 7.2 Persamaan integral * Mahasiswa dapat memahami teorema konvolusi * Mahasiswa dapat memahami persamaan integral	kuliah mimbar, tanya jawab dan diskusi.	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2

14	Kisi Kisi Ujian Semester TIU: Memberi gambaran tentang soal Ujian Semester	Soal soal terkait topik bahasan pertemuan kedelapan sampai pertemuan terakhir. * Mahasiswa dapat memahami dan mengingat kembali topik yang sudah dipelajari dari pertemuan kedelapan sampai pertemuan terakhir	diskusi dan quiz	Papan tulis, LCD atau proyektor	1, 2

Daftar Referensi

[1] K.A. Stroud, *Engineering Mathematics,* 3rd Edition, The Macmillan Press Ltd, 1987

[2] Kreyzig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics*, Edisi ke-7, John Wiley, 1993

ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

A. NOTASI

Z = (x , y) artinya Z= x + y i

dimana :

x = bagian riel dari Z

y = bagian imaginer dari Z

i = bilangan imaginer = $\sqrt{-1}$

Catatan :

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^5 = i$$

B. KONJUGATE (SEKAWAN) BILANGAN KOMPLEKS

Jika diketahui bilangan kompleks Z = x + y i maka konjugate (sekawan) bilangan tersebut adalah $\bar{Z} = x - yi$

Contoh :

Z = 8 – 2 i konjugatenya $\bar{Z} = 8+2i$

Z = 4 i – 5 konjugatenya $\bar{Z} = -4i-5$

dimana :

$$Z.\bar{Z} = (x+yi).(x-yi)$$
$$Z.\bar{Z} = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2$$
$$\boxed{Z.\bar{Z} = x^2 + y^2}$$

Jadi perkalian bilangan kompleks dengan konjugatenya atau kelipatan konjugatenya menghasilkan bilangan riel.

Contoh :

$$(8-2i).(8+2i) = 8^2+2^2 = 68$$
$$(4i-5).(-4i-5) = 4^2+(-5)^2 = 41$$

C. OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

Misalkan diketahui bilangan kompleks $Z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $Z_2 = x_2 + y_2 i$ maka :

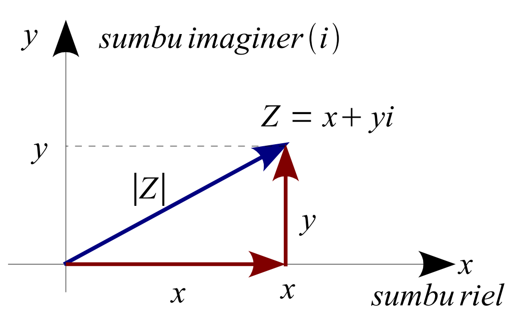
1. $Z_1 + Z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)$
   $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$
2. $Z_1 - Z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)$
   $Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i$
3. $k.Z_1 = k(x_1 + y_1 i)$
   $k.Z_1 = k.x_1 + k.y_1 i$
4. $Z_1 . Z_2 = (x_1 + y_1 i).(x_2 + y_2 i)$
   $Z_1 . Z_2 = x_1 . x_2 + x_1 . y_2 i + y_1 . x_2 i + y_1 . y_2 i^2$
5. $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)}$
   kalikan dengan konjugate

Contoh 01 :

ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

D. <u>MODULUS (NILAI ABSOLUT)</u>

Modulus bilangan kompleks Z = x + yi merupakan panjang vektor posisi dari Z. Perhatikan diagram Argand di bawah ini !



Modulus dari Z adalah :

$$\boxed{|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Sifat-sifat Modulus :

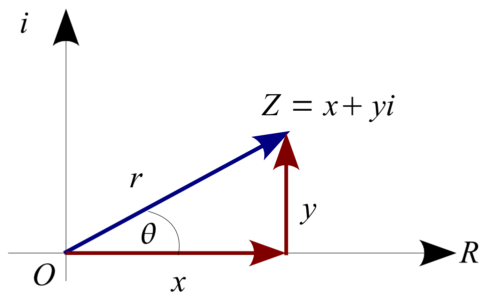
1. $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$
2. $|Z_1 - Z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
3. $|c.Z_1| = |c|.|Z_1|$
4. $|Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2|$
5. $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

Contoh 01 :

ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

E. BENTUK POLAR (KUTUB) DARI BILANGAN KOMPLEKS

Perhatikan diagram Argand di bawah ini !



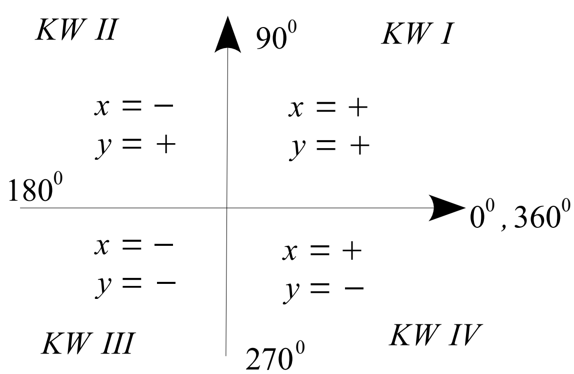
Misalkan panjang vektor OZ = r maka :

$* \ \sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta$

$* \ \cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$

$* \ tg\,\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = arc\,tg\,\frac{y}{x}$

θ disebut argumen dari Z. Untuk menentukan nilai θ , tanda di kuadran harus diperhatikan.



Jadi bentuk polar dari Z = x + y i adalah :

$Z = r\cos\theta + r\sin\theta\, i$

$\boxed{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

Contoh 01 :

F. BENTUK EKSPONENSIAL DARI BILANGAN KOMPLEKS.

Telah dipelajari bahwa bentuk Z = x + y i dapat diubah menjadi $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

dengan menggunakan deret pangkat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

maka :

$$Z = r\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right.$$
$$\left. + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$Z = r\left(1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right)$$

$$Z = r\left(1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \dots\right)$$

$$Z = r\left(1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right)$$

sehingga :

$$\boxed{Z = r\,.\,e^{i\theta}}$$

Bentuk ini disebut bentuk eksponensial dari bilangan kompleks.

Contoh :

ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

G. <u>PANGKAT BILANGAN KOMPLEKS</u>

Dengan menggunakan pengertian pangkat $a^n = \underbrace{a\,x\,a\,x\,a\ldots x\,a}_{n}$ akan ditentukan rumus untuk perpangkatan dari bilangan kompleks. Misalkan diketahui :

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \quad \text{maka :}$$

I. $Z_1.Z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$Z_1.Z_2 = r_1.r_2\left(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + \cos\theta_1.i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1.\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1.\sin\theta_2\right)$$
$$Z_1.Z_2 = r_1.r_2\left(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + i\cos\theta_1.\sin\theta_2 + i\sin\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2\right)$$
$$Z_1.Z_2 = r_1.r_2\left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\}$$

jika $Z_1 = Z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ didapat :

$$Z_1.Z_2 = r.r\left\{\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)\right\}$$
$$Z^2 = r^2\left\{\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right\}$$

jika $Z_1 = Z_2 = Z_3 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ didapat :

$$Z_1.Z_2.Z_3 = r.r.r\left\{\cos(\theta+\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta+\theta)\right\}$$
$$Z^3 = r^3\left\{\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\right\}$$

sehingga :

$$\boxed{Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Rumus di atas dinamakan sebagai rumus **“De Moivre”**

II. $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\,x\,\frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,x\,(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2)}$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,x\,(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2}$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - i\cos\theta_1.\sin\theta_2 + i\sin\theta_1.\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1.\sin\theta_2\right)$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right\}}$$

Contoh 01 :

ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

H. AKAR BILANGAN KOMPLEKS

Dari rumus perpangkatan bilangan kompleks $Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ dan mengingat periode fungsi sinus dan cosinus adalah 2π maka :

$$\boxed{\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n})}$$

Dalam penentuan akar bilangan kompleks dikenal akar utama yaitu akar yang paling dekat dengan sumbu x positif.

Contoh 01 :

ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS

A. DEFENISI

Turunan fungsi kompleks f(Z) di Z_0 dinyatakan dengan :

$$\boxed{f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z_0 + \Delta Z) - f(Z_0)}{\Delta Z}}$$

fungsi f(Z) disebut differensiabel (dapat diturunkan) di Z_0 bila nilai limit di atas ada.

Contoh 01:

B. RUMUS DASAR TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS.

Misal fungsi kompleks f(Z) differensiabel maka rumus turunannya sama dengan rumus turunan fungsi riel yaitu :

1. $Jika\ f(Z) = C\ maka\ f'(Z) = 0$
2. $Jika\ f(Z) = CZ^n\ maka\ f'(Z) = CnZ^{n-1}$
3. $Jika\ f(Z) = g(Z) \pm h(Z)\ maka$ $f'(Z) = g'(Z) \pm h'(Z)$
4. $Jika\ f(Z) = g(Z).h(Z)\ maka$ $f'(Z) = g'(Z).h(Z) + g(Z).h'(Z)$
5. $Jika\ f(Z) = \frac{g(Z)}{h(Z)}\ maka$ $f'(Z) = \frac{g'(Z).h(Z) - g(Z).h'(Z)}{h^2(Z)}$

Contoh 01:

TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS

C. PERUMUSAN CAUCHY RIEMANN

Misalkan f(Z) = U(x , y) + i V(x , y) dan f'(Z) ada pada $Z_0 = x_0 + i\, y_0$. Dengan menggunakan defenisi turunan dapat diuraikan menjadi :

1. $\Delta Z = (\Delta x, 0) = \Delta x \ \ maka:$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z+\Delta Z) - f(Z)}{\Delta Z}$$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{U(x_0+\Delta x, y_0) + i V(x_0+\Delta x, y_0)\} - \{U(x_0, y_0) + i V(x_0, y_0)\}}{\Delta x}$$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{U(x_0+\Delta x, y_0) - U(x_0, y_0)\}}{\Delta x} + i \frac{\{V(x_0+\Delta x, y_0) - V(x_0, y_0)\}}{\Delta x}$$

$$f'(Z) = U'(x_0, y_0) + i V'(x_0, y_0)$$

$$f'(Z) = U_x(x_0, y_0) + i V_x(x_0, y_0) \qquad (1)$$

2. $\Delta Z = (0, \Delta y) = i \Delta y \ \ maka:$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z+\Delta Z) - f(Z)}{\Delta Z}$$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{U(x_0, y_0+\Delta y) + i V(x_0, y_0+\Delta y)\} - \{U(x_0, y_0) + i V(x_0, y_0)\}}{i \Delta y}$$

$$dikalikan\ dengan \quad \frac{i}{i}$$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{iU(x_0, y_0+\Delta y) + i^2 V(x_0, y_0+\Delta y_0) - i U(x_0, y_0) - i^2 V(x_0, y_0)}{i^2 \Delta y}$$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{i U(x_0, y_0+\Delta y) - V(x_0, y_0+\Delta y_0) - i U(x_0, y_0) + V(x_0, y_0)\}}{-\Delta y}$$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{V(x_0, y_0+\Delta y) - V(x_0, y_0) - i U(x_0, y_0+\Delta y) + i U(x_0, y_0)\}}{\Delta y}$$

$$f'(Z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{V(x_0, y_0+\Delta y) - V(x_0, y_0)\}}{\Delta y} - i \frac{\{U(x_0, y_0+\Delta y) - U(x_0, y_0)\}}{\Delta y}$$

$$f'(Z) = V'(x_0, y_0) - i U'(x_0, y_0)$$

$$f'(Z) = V_y(x_0, y_0) - i U_y(x_0, y_0) \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) didapat Persamaan Cauchy Riemann (PCR) yaitu :

$$\boxed{\begin{aligned} &* U_x(x_0, y_0) = V_y(x_0, y_0) \\ &* U_y(x_0, y_0) = -V_x(x_0, y_0) \end{aligned}}$$

Jadi fungsi f(Z) = U(x , y) + i V(x , y) akan differensiabel di $Z_0 = x_0 + i\, y_0$ jika bagian riel dan bagian imaginer dari f(Z) memenuhi Persamaan Cauchy Riemann.

Nilai turunan fungsi tersebut di $Z_0 = x_0 + i\, y_o$ dinyatakan dengan :

$$f'(Z) = U_x(x_0, y_0) + i V_x(x_0, y_0)$$

atau :

$$f'(Z) = V_y(x_0, y_0) - i U_y(x_0, y_0)$$

Contoh 01 :

TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS

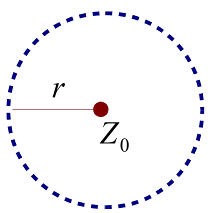
FUNGSI ANALITIK

A. FUNGSI ANALITIK

Misalkan D himpunan (daerah buka), maka :

1. Fungsi f(Z) disebut analitik pada D jika $f'(Z)$ ada $\forall_Z \in D$ atau Persamaan Cauchy Riemann berlaku $\forall_Z \in D$.

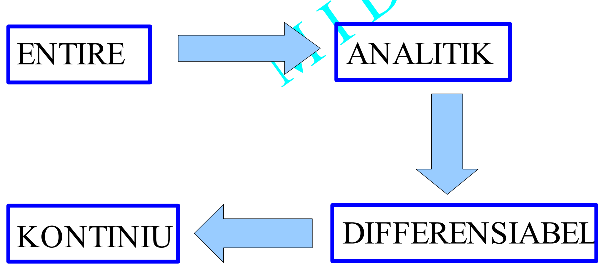
2. Fungsi f(Z) disebut analitik di Z = Z0 jika f(Z) analitik pada lingkungan dari Z_0. Lingkungan Z_0 adalah lingkaran buka yang berpusat di Z_0 dan berjari-jari r.



3. Fungsi f(Z) disebut entire jika f(Z) analitik $\forall_Z$

4. Bila f(Z) gagal analitik di Z = Z_0 maka Z_0 disebut titik singular dari f(Z).

Dalam bentuk implikasi dapat dituliskan :



Kontraposisi yang terakhir dapat digunakan untuk mencari titik singular dari fungsi f(Z). Fungsi rasional f(Z) akan diskontiniu pada pembuat nol dari penyebutnya.

Contoh 01 :

FUNGSI ANALITIK

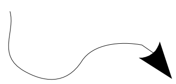
FUNGSI ANALITIK

INTEGRAL KOMPLEKS

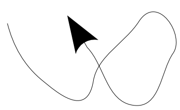
A. INTEGRAL LINTASAN

Bentuk lintasan dibedakan menjadi 2 bagian yaitu lintasan tutup dan lintasan buka. Lintasan C yang dinyatakan dengan $z(t) = x(t) + i\,y(t),\ a \leq t \leq b$ disebut lintasan tutup jika ujungnya berimpit, yang berarti $z(a) = z(b)$, dan disebut lintasan buka jika ujungnya tidak berimpit, yang berarti $z(a) \neq z(b)$.

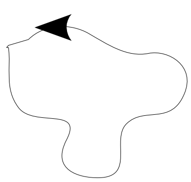
Contoh :

a) 

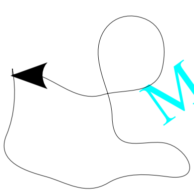
lintasan buka

b) 

lintasan buka

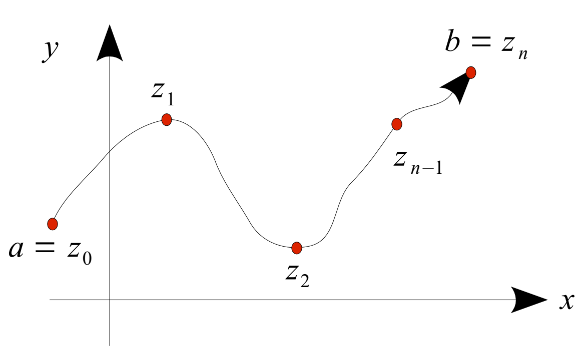
c) 

lintasan tutup
(sederhana)

d) 

lintasan tutup
(tidak sederhana)

Perhatikan gambar!



Asumsikan $a \neq b$ dan P menyatakan partisi dari lintasan C yaitu :

$P = \{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ dengan $a = z_0$ dan $b = z_n$, maka jumlah Riemann yang bersesuaian dengan partisi P adalah :

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k$$

dengan z_k^* merupakan nilai yang terletak antara z_{k-1} dan z_k.

Nilai integral lintasannya / garis / contour adalah :

$$L = \lim_{n\to\infty} S(P) = \int_C f(z)\,dz$$

B. INTEGRAL CAUCHY

Misalkan fungsi f(z) analitik di dalam dan pada lintasan tutup C arah positif dan z_0 titik interior dari C. Jika $z = z_0 + r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ maka :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{z_0 + r e^{it} - z_0}\, d(z_0 + r e^{it})$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}}\, i r e^{it}\, dt$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it})\, i\, dt$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + 0)\, i\, dt$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = i f(z_0) \int_0^{2\pi} dt$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = i f(z_0) .\, t \Big|_0^{2\pi}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = i f(z_0) .\, (2\pi - 0)$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

INTEGRAL KOMPLEKS

Jadi rumus integral Cauchy dituliskan dengan :

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)}$$

atau

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz}$$

Contoh 01 :

INTEGRAL KOMPLEKS

TURUNAN FUNGSI ANALITIK

A. TURUNAN FUNGSI ANALITIK.

Misalkan fungsi f(z) analitik di z_0 , maka turunan pertama fungsi f(z) di z_0 dinyatakan dengan :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

dengan menggunakan integral Cauchy $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ didapat :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right\}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\left\{\int_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz - \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right\}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\left\{\int_C \frac{f(z)(z-z_0)-f(z)(z-(z_0+\Delta z))}{(z-(z_0+\Delta z))(z-z_0)}dz\right\}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\left\{\int_C \frac{f(z)\{z-z_0-z+z_0+\Delta z\}}{(z-(z_0+\Delta z))(z-z_0)}dz\right\}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\left\{\int_C \frac{f(z)\{\Delta z\}}{(z-(z_0+\Delta z))(z-z_0)}dz\right\}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(z)}{(z-(z_0+\Delta z))(z-z_0)}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(z)}{(z-(z_0+0))(z-z_0)}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0)}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right\}$$

Jadi turunan pertama fungsi f(z) di z_0 adalah :

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right\}}$$

Dengan cara yang sama diperoleh turunan ke-n dari fungsi f(z) di titik z_0 yaitu :

$$\boxed{f^{n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\left\{\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right\}}$$

Rumus turunan di atas dapat digunakan untuk menentukan hasil pengintegralan yaitu:

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}.f^{n}(z_0)}$$

Contoh 01 :

TURUNAN FUNGSI ANALITIK

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

A. KAIDAH UJI KEKONVERGENAN.

Deret konvergen adalah deret yang memiliki limit jumlah, sedangkan deret yang tidak memiliki limit jumlah disebut deret divergen. Di bawah ini terdapat beberapa Kaidah uji kekonvergenan suatu deret, yaitu :

I. Kaidah 1.

"Jika suatu deret konvergen maka suku-sukunya menuju nol"

dinotasikan dengan $\boxed{\lim_{n\to\infty} U_n = 0}$

Contoh :

* Deret : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$ merupakan deret konvergen, terlihat bahwa suku-sukunya menuju nol.

* Deret : $1+2+4+8+16+32+...$ merupakan deret divergen.

Akan tetapi kaidah 1 ini tidak berlaku sebaliknya,

Contoh :

Kesimpulan :

Dari kaidah 1 yang dapat disimpulkan adalah :

1. Jika suatu deret memiliki $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$ maka deret tersebut divergen.

2. Jika suatu deret memiliki $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ maka deret tersebut mungkin konvergen atau divergen jadi harus diuji lagi.

II. Kaidah 2.

Kaidah ini sering disebut dengan **uji perbandingan**, yaitu :

"Suatu deret dengan suku-suku positif akan konvergen jika suku-sukunya lebih kecil dari suku-suku deret konvergen positif lain".

Dalam Kaidah 2 kesulitan yang dihadapi adalah menentukan deret pembanding. Salah satu deret pembanding yang berguna dalam kaidah in adalah :

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+...$$

1. Jika $p \leq 1$ maka deret divergen.
2. Jika $p > 1$ maka deret konvergen.

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

Contoh 01 :

III. Kaidah 3.

Kaidah ini sering disebut dengan **Uji Pembagian D'Alembert** yang digunakan untuk deret dengan suku-suku positif.

Misalkan $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1}$ merupakan deret dengan suku-suku positif, kaidah Uji Pembagian D'Alembert adalah :

1. Jika $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ maka deretnya konvergen.
2. Jika $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ maka deretnya divergen.
3. Jika $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ maka deretnya mungkin konvergen atau divergen.

Contoh 01 :

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

B. <u>KEKONVERGENAN M UTLAK.</u>

Kita telah mempelajari kekonvergenan deret dengan suku-suku positif, sekarang akan ditinjau deret dengan tanda suku-sukunya bergantian menggunakan kekonvergenan mutlak, yaitu :

1. Jika $\left|\sum u_n\right|$ konvergen maka $\sum u_n$ disebut konvergen mutlak.
2. Jika $\left|\sum u_n\right|$ divergen tetapi $\sum u_n$ konvergen maka disebut konvergen bersyarat.

Contoh 01 :

KAIDAH UJI KEKONVERGENAN

DERET PANGKAT

A. DERET TAYLOR DAN DERET MACLAURIN.

Misalkan diketahui sebuah fungsi y = f(x) dan fungsi tersebut differensiabel pada x = a maka fungsi tersebut dapat direpresentasikan dalam deret pangkat :

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+..$$

dengan c_0, c_1, c_2, ... merupakan konstanta.

Konstanta c_n dapat ditentukan dengan langkah berikut :

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+..$$
$$f'(x)=1!\,c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+...$$
$$f''(x)=2!\,c_2+3!\,c_3(x-a)+4.3\,c_4(x-a)^2+...$$
$$f'''(x)=3!\,c_3+4!\,c_4(x-a)+5.4.3\,c_2(x-a)^2 -$$
dan seterusnya.

Jika x = a disubstitusikan ke dalam fungsi dan turunan fungsi di atas diperoleh :

$$c_0=f(a)$$
$$c_1=f'(a)$$
$$c_2=\frac{f''(a)}{2!}$$
$$c_3=\frac{f'''(a)}{3!}$$
dan seterusnya

Jadi representasi sebuah fungsi dalam deret pangkat (x – a) adalah :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...$$

Deret pangkat di atas disebut deret Taylor yang diambil dari nama ahli matematika Inggris Brook Taylor (1685 – 1731).

Jika nilai a = 0 maka deret pangkat di atas disebut deret Maclaurin yang diambil dari nama ahli matematika Skotlandia Colin Maclaurin (1698 – 1746), sehingga deret Maclaurin dapat dinyatakan dengan :

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3+...$$

Contoh 01 :

DERET PANGKAT

B. DERET BINOMIAL.

Misalkan diketahui fungsi binomial $f(x) = (1+x)^n$ maka sesuai dengan deret Maclaurin didapat :

$$f(x) = (1+x)^n$$
$$\rightarrow \; f(0) = 1$$
$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$
$$\rightarrow \; f'(0) = n$$
$$f'(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$
$$\rightarrow \; f''(0) = n(n-1)$$
$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)$$
$$\rightarrow \; f'''(0) = n(n-1)(n-2)$$

maka deret pangkatnya adalah :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \ldots$$

$$f(x) = 1 + \frac{n}{1!}(x) + \frac{n(n-1)}{2!}(x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x)^3 + \ldots$$

Dengan menggunakan rumus kombinasi $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ maka untuk sebarang n dan $-1 < x < 1$ deret binomial dinyatakan oleh :

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}(x) + \frac{n(n-1)}{2!}(x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x)^3 + \ldots}$$

atau :

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + C_1^n(x) + C_2^n(x^2) + C_3^n(x^3) + \ldots}$$

Contoh 01 :

DERET PANGKAT

TRANSFORMASI LAPLACE

A. DEFENISI TRANSFORMASI LAPLACE

Misalkan fungsi f(t) terdefenisi untuk $t \geq 0$ maka transformasi laplace dari f(t) didefenisikan sebagai :

$$\boxed{L\left(f(t)\right) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt}$$

Karena bentuk integral di atas merupakan fungsi dalam parameter s, maka notasi lain yang biasa digunakan adalah $F(s) = L(f(t))$, sedangkan fungsi asal f(t) diperoleh menggunakan transformasi invers yaitu :

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\left(F(s)\right)}$$

Transformasi laplace dari f(t) untuk $t \geq 0$ ada jika fungsi tersebut kontinu bagian demi bagian dan terbatas eksponensial.

Berikut ini adalah contoh penentuan rumus transformasi laplace :

I. $f(t) = e^{at}$

$$L\left(f(t)\right) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$L\left(e^{at}\right) = \int_0^{\infty} e^{-st} . e^{at}\,dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st+at}\,dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{(-s+a)t}\,dt$$

$$F(s) = \frac{1}{-s+a} . e^{(-s+a)t} \Big]_0^{\infty} , \text{untuk } s > a$$

$$F(s) = \frac{1}{-s+a} . e^{-\infty} - \frac{1}{-s+a} . e^{0}$$

$$F(s) = \frac{1}{-s+a} . 0 - \frac{1}{-s+a} . 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Jadi transformasi laplacenya adalah :

$$\boxed{L\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}}$$

sedangkan transformasi inversnya adalah :

$$\boxed{L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}}.$$

Contoh 01 :

TRANSFORMASI LAPLACE

II. $f(t) = t^n \quad untuk \;\; n = 0,1,2,\ldots$

$$untuk \;\; n = 0 \;\; maka \;\; f(t) = 1$$

$$L\left(f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st}.\,f(t)\,dt$$

$$L\left(f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st}.\,1\,dt$$

$$L\left(f(t)\right) = -\frac{1}{s}.\,e^{-st}\,\Big]_0^\infty \;\; untuk\; s > 0$$

$$L\left(f(t)\right) = -\frac{1}{s}.\,e^{-\infty} + \frac{1}{s}.\,e^{0}$$

$$L\left(f(t)\right) = 0 + \frac{1}{s}$$

$$L\left(f(t)\right) = F(s) = \frac{1}{s}$$

$$untuk \;\; n = 1 \;\; maka \;\; f(t) = t$$

$$L\left(f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st}.\,f(t)\,dt$$

$$L\left(f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st}.\,t\;dt$$

t	e^{-st}
1	$\frac{-1}{s}.\,e^{-st}$
0	$\frac{1}{s^2}.\,e^{-st}$

$$L\left(f(t)\right) = -\frac{t}{s}.\,e^{-st} - \frac{1}{s^2}.\,e^{-st}\,\Big]_0^\infty$$

$$L\left(f(t)\right) = \left(-\frac{\infty}{s}e^{-\infty} - \frac{1}{s^2}e^{-\infty}\right) - \left(\frac{0}{s}e^{0} - \frac{1}{s^2}e^{0}\right)$$

$$L\left(f(t)\right) = (0-0) - (0 - \frac{1}{s^2})$$

$$L\left(f(t)\right) = F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\boxed{L(t^n) = \frac{n\,!}{s^{n+1}}}$$

Transformasi inversnya adalah :

$$\boxed{L^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)\,!}}$$

B. <u>TRANSFORMASI LAPLACE DARI TURUNAN FUNGSI.</u>

Misalkan f(t) dan turunannya f '(t) kontinu dan terbatas eksponensial maka f(t) dan f '(t) mempunyai transformasi laplace. Dengan menggunakan rumus integral parsial didapat:

TRANSFORMASI LAPLACE

$$L\left(f'(t)\right) = \int_0^{\infty} e^{-st}.\, f'(t)\, dt$$

Misalkan:

$$u = e^{-st} \;\; maka \;\; du = -s e^{-st} dt$$

$$dv = f'(t)\, dt \;\; maka \;\; v = \int f'(t)\, dt$$

$$v = f(t)$$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$= e^{-st}.\, f(t)\,]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t).(-s e^{-st})\, dt$$

$$= e^{-s} f(t) - e^{0} f(0) + \int_0^{\infty} f(t).(s e^{-st})\, dt$$

$$= 0 - f(0) + s \int_0^{\infty} f(t).(e^{-st})\, dt$$

$$= -f(0) + s.F(s)$$

maka:

$$\boxed{L\left(f'(t)\right) = s\,F(s) - f(0)}$$

Dengan cara yang sama didapatkan transformasi Laplace dari :

* turunan orde 2 :

$$L\left(f''(t)\right) = s^2 F(s) - s\, f(0) - f'(0)$$

*turunan orde n :

$$L\left(f^{n}(t)\right) = s^{n} F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Berikut ini contoh penurunan rumus transformasi Laplace dari f(t) = sin at,

$$f(t) = \sin a\ t \qquad maka \;\; f(0) = 0$$

$$f'(t) = a \cos a\ t \qquad maka \;\; f'(0) = a$$

$$f''(t) = -a^2 \sin a\ t \;\; maka \;\; f''(0) = 0$$

$$L\left(f''(t)\right) = s^2 F(s) - s\, f(0) - f'(0)$$

$$L\left(-a^2 \sin a\ t\right) = s^2 L(f(t)) - s.0 - a$$

$$L\left(-a^2 \sin a\ t\right) = s^2 L(f(t)) - a$$

$$a = s^2 L(\sin a\ t) + L(a^2 \sin a\ t)$$

$$a = L(\sin a\ t).(s^2 + a^2)$$

$$\frac{a}{s^2 + a^2} = L(\sin a\ t)$$

Jadi transformasi Laplace dari f(t) = sin at adalah :

$$L(\sin a\ t) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Sedangkan transformasi inversnya adalah :

$$L^{-1}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \sin a\ t$$

atau

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right) = \frac{\sin a\ t}{a}$$

Di bawah ini adalah tabel transformasi Laplace dari beberapa fungsi :

TABEL TRANSFORMASI LAPLACE

f(t)	F(s)=L(f(t))	Domain F(s)
c	$\frac{c}{s}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{a t}$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin a\ t$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos a\ t$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\sinh a\ t$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$\cosh a\ t$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$

Contoh 01 :

TRANSFORMASI LAPLACE

C. MASALAH NILAI AWAL .

Kita telah mempelajari transformasi laplace metode turunan fungsi. Metode tersebut dapat digunakan menentukan solusi khusus dari persamaan differensial dengan koefisien konstanta yang nilai aawalnya ditentukan. Bentuk persamaan differensial orde dua dengan koefisien konstanta sering disebut masalah nilai awal, bentuknya dinotasikan dengan :

$$\boxed{a\,y'' + b\,y' + c\,y = r(t)}$$

dengan y(0) = m dan y ' (0) = n.

Untuk menentukan solusinya, misalkan fungsi y(t) = f(t). Dengan menggunakan rumus transformasi laplace :

$$L(f'(t)) = s\,.\,F(s) - f(0) \quad dan$$
$$L(f''(t)) = s^2.\,F(s) - s\,.\,f(0) - f'(0)$$

ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan differensialnya ditransformasikan. Invers dari transformasi Laplacenya merupakan solusi dari masalah nilai awal tersebut.

Contoh 01 :

Tentukanlah solusi dari masalah nilai awal di bawah ini.

$$y'' + 2\,y' - 8 = 0 \quad jika\ diketahui$$
$$y(0) = 0 \ \ dan \ \ y'(0) = 6$$

TRANSFORMASI LAPLACE

D. PERGESERAN SUMBU

I. Pergeseran Terhadap Sumbu S

Andaikan transformasi Laplace fungsi f(t) ada maka pergeseran hasil transformasinya sebesar a satuan merupakan grafik hasil transformasi fungsi $g(t)=e^{at}f(t)$. Jika a > 0 maka grafik f(t) bergeser sebesar a satuan ke kanan sedangkan jika a < 0 bergeser sebesar a satuan ke kiri. Dari rumus transformasi Laplace didapat:

$$L\left(e^{at}f(t)\right)=\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at}f(t)\right)dt$$

$$L\left(e^{at}f(t)\right)=\int_0^\infty e^{-st+at}.f(t)\,dt$$

$$L\left(e^{at}f(t)\right)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt$$

$$\boxed{L\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a)}$$

dan transformasi inversnya adalah :

$$\boxed{L^{-1}\left(F(s-a)\right)=e^{at}f(t)}$$

Tabel Pergeseran Terhadap Sumbu S Transformasi Laplace.

$f(t)$	$F(s)$	*Domain*
$C\,e^{at}$	$\frac{C}{s-a}$	$s>a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$e^{at}\sinh bt$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	$s>a+\|b\|$
$e^{at}\cosh bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$	$s>a+\|b\|$

TRANSFORMASI LAPLACE

Contoh 01:

II. Pergeseran Terhadap Sumbu t

Misalkan g(t) adalah fungsi tangga yang didefenisikan dengan :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & ; \ t < a \\ f(t-a) & ; \ t > a \end{cases}$$

$$dengan\ a \geq 0$$

Untuk menentukan transformasi Laplace fungsi tangga, perhatikan fungsi tangga satuan di bawah ini :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; \ t \leq a \\ 1 & ; \ t > a \end{cases}$$

$$dengan\ a \geq 0$$

TRANSFORMASI LAPLACE

sehingga fungsi tangga g(t) dapat dinyatakan dengan g(t) = f(t – a) . u(t – a) dan transformasi Laplacenya adalah :

$$L(g(t)) = L(f(t-a).u(t-a))$$
$$L(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st}.f(t-a).u(t-a)dt$$
$$L(g(t)) = \int_0^a e^{-st}.f(t-a).u(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st}.f(t-a).u(t-a)dt$$
$$L(g(t)) = \int_0^a e^{-st}.f(t-a).0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}.f(t-a).1\,dt$$
$$L(g(t)) = \int_a^\infty e^{-st}.f(t-a)dt$$
$$L(g(t)) = \int_0^\infty e^{-s(t+a)}.f(t)dt$$
$$L(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{-sa}.f(t)dt$$
$$L(g(t)) = e^{-as}.F(s)$$

Jadi transformasi Laplace dari fungsi tangga g(t) = f(t – a) . u(t – a) adalah :

$$\boxed{\begin{aligned} L(g(t)) &= L(f(t-a).u(t-a)) \\ L(g(t)) &= e^{-as}.F(s) \end{aligned}}$$

dan invers transformasi Laplacenya adalah :

$$L^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right) = f(t-a).u(t-a) = g(t)$$

Tabel Transformasi Laplace Untuk Fungsi Tangga Satuan.

$f(t)$	$F(s)$
$C.u(t-a)$	$\frac{C}{s}.e^{-as}$
$C\,t.u(t-a)$	$\left(\frac{C}{s^2}+\frac{C\,a}{s}\right).e^{-as}$
$C\,t^2.u(t-a)$	$\left(\frac{2C}{s^3}+\frac{2C}{s^2}+\frac{C\,a^2}{s}\right).e^{-as}$
$C\,e^{bt}.u(t-a)$	$\frac{C\,e^{-ab}}{s+b}.e^{-as}$
$C\cos bt.u(t-a)$	$\left(\frac{Cs\cos ab}{s^2+b^2}-\frac{Cb\sin ab}{s^2+b^2}\right).e^{-as}$
$C\sin bt.u(t-a)$	$\left(\frac{Cb\cos ab}{s^2+b^2}+\frac{Cs\sin ab}{s^2+b^2}\right).e^{-as}$
$C\,e^{-kt}.\cos bt.u(t-a)$	$\left(\frac{C(s+k)\cos ab}{(s+k)^2+b^2}-\frac{Cb\sin ab}{(s+k)^2+b^2}\right).e^{-a(s+k)}$
$C\,e^{-kt}.\sin bt.u(t-a)$	$\left(\frac{Cb\cos ab}{(s+k)^2+b^2}+\frac{C(s+k)\sin ab}{(s+k)^2+b^2}\right).e^{-a(s+k)}$

TRANSFORMASI LAPLACE

Contoh 01: